El problema del continuo en René Thom

Fernando Miguel Pérez Herranz

Universidad de Alicante

Reception date / Fecha de recepción: 23-02-2009
Acceptation date / Fecha de aceptación: 06-05-2009

Resumen.

René Thom ha propuesto el concepto topológico de continuo como respuesta al concepto lógico de infinito. En este trabajo se mostrará que, frente a la definición combinatoria de conjunto infinito propuesta por Cantor, la definición porfiriana de continuo propuesta por Thom salva las paradojas de la teoría de conjuntos y comporta consecuencias ontológicas decisivas en el ámbito del mundo morfológico poniendo límites, por ejemplo, a la evolución ilimitadamente innovadora de Prigogine, etc.

Palabras clave: continuo, infinito, Prigogine, René Thom, topología.

Abstract. *The Question of Continuum in René Thom*

René Thom has proposed the topologic concept continuum as a response to the logics concept infinity. In this paper we show that, as opposed to the combinatorial definition of infinite set proposed by Cantor, the porfirian definition of continuum proposed by Thom goes beyond the paradoxes of set theory and has decisive ontologic consequences for morphologic world, putting limits, for instance, to Prigogine's unlimited innovative evolution, etc.

Key Words: Continuum, Infinite, Prigogine, René Thom, Topology.

Introducción

Algunos matemáticos, como René Thom (1917-2002), han sido muy reticentes con la popularidad escolar que adquirió la teoría cantoriana de conjuntos. El núcleo de la crítica de Thom a la teoría conjuntista se encuentra en un artículo sobre pedagogía de las matemáticas, en el que aparece una idea que se irá desplegando a lo largo de su obra.[1] La clave de la teoría de conjuntos no tiene que desplazarse a la lógica, sino que hay que encontrarla en la ontología misma; pues los problemas no nacen tanto de las paradojas (Russell) o de la indecibilidad (Gödel) como de que no haya lugar para ningún espacio sustrato. Thom

1 R. Thom, "Matemáticas modernas y matemáticas de siempre", en J. Hernández (sel.), *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza, Madrid, 1978, p. 124.

utiliza un argumento ingenioso e intuitivo: un zorro que entra en el gallinero de un corral en busca de un suculento bocado gallináceo no lo hace porque use un silogismo similar a éste: «Las gallinas están en el gallinero; el gallinero está en la granja; luego las gallinas están en el granja»; el zorro sabe que las gallinas se encuentran en el gallinero mediante una intuición espacial. El ejemplo es muy significativo, pues la (auto)evidencia del zorro a la que se acoge Thom se incorpora a un contexto etológico (como otros que se han popularizado: «El gato atrapa al ratón», «Este gato es negro y blanco»...). Y como —hemos de suponer— el zorro no estructura el espacio métricamente al modo del ingeniero, el ente primordial o principio amorfo que va estructurándose mediante las herramientas del grupo métrico, parece que nos hemos de remitir a otros invariantes topológicos. El zorro intuye, pero no calcula. Pero ¿qué ocurre con los seres humanos? ¿Acaso no nos diferenciamos de los animales precisamente por el uso que hacemos del *número*, como tan señaladamente declaró Kronecher? Thom afirmará que, antes que el número, es la geometría lo que caracteriza la creatividad humana. Los seres humanos, seres primordialmente lingüísticos, han creado un lenguaje intermedio entre la intuición topológica y la formalización algebraica: la geometría euclídea.[2] La obra de Euclides habría significado algo más que ser la primera sistematización de las matemáticas,[3] pues habría construido el primer ejemplo de transcripción de procesos espaciales *bi* o *tri*dimensionales al proceso lógico *uni*dimensional de la escritura. Thom replantea entonces los problemas gnoseológicos que surgen de las relaciones entre el lenguaje unidimensional y las morfologías multidimensionales:

> Quisiera añadir —escribe Thom— que el lenguaje de la geometría elemental ofrece una solución al problema de expresar en una combinatoria unidimensional —la del lenguaje— una morfología, una combinatoria multidimensional.[4]

Lo que importa al matemático, y por extensión al ontólogo, no es tanto la generatividad como la comprensión y el sentido: ¿Cómo son comprensibles entonces el infinito, el continuo y el espacio… los conceptos nucleares de la teoría de conjuntos? ¿Qué sentido tiene el conjunto de los números naturales o la hipótesis del continuo? ¿Pueden separarse las matemáticas de la informática?, etc.

2 "El pensamiento científico se separó del mágico desde el momento en que nació la Geometría. El nacimiento de la Geometría separó la magia de la ciencia, ya que en el pensamiento mágico son posibles las acciones a distancia mediante la propagación por similaridad. La propagación por similaridad no existe en Física", R. Thom, "Entrevista", *El Basilisco*, 13, 1982, p. 72.

3 F. M. Pérez Herranz, "Entre Samos y el Museo: la travesía por el número y la forma geométrica", J.L. González Recio (ed.), *Átomos, almas y estrellas. Estudios sobre la ciencia griega*, Plaza y Valdés Madrid / México, 2007, pp. 353-398.

4 R. Thom, "Matemáticas modernas y matemáticas de siempre", *op. cit.*, p. 154.

1. Cantor: La *diagonal*, los conjuntos combinatorios y el continuo

La cuestión del infinito arranca en la modernidad de una serie de aporías, entre las que se encuentra la paradoja atribuida a Galileo: «no hay más números cuadrados que números en general, pues a cada número entero puede hacérsele corresponder su cuadrado: $n \rightarrow n^2$». Mas para evitar una paradoja hay que reconvertirla en una identidad. Podrá seguirse la vía de Cauchy al hacer que el acto sea finito o la de Dedekind, que el infinito sea acto. George Cantor (1845-1918)[5] toma esta vía que asume como postulado: los objetos infinitos se definen por propiedades aparentemente paradójicas; por ejemplo, aquellos que se ponen en correspondencia biunívoca con sus cuadrados, etc. Cantor establece una correspondencia entre los números naturales (N), los números pares (E), los cuadrados (N^2), los enteros (Z)… Y concluye que cualquier conjunto que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales es un infinito enumerable; a este nuevo número Cantor lo llamó «transfinito»[6] y posee la cardinalidad $\aleph_0$. Es decir, que N, E, N^2 y Z tienen $\aleph_0$ elementos, conformando así los dos primeros esquemas de identidad: «enumerabilidad» y «cardinalidad» que salvan la paradoja de Galileo a la vez que comprometen a Cantor con una ontología que privilegia lo discreto.

A continuación, Cantor establece otro esquema de identidad para los números racionales (Q) expresables como cociente de números enteros y aparentemente más numerosos que los números naturales - entre 0 y 1, por ejemplo, habría una infinidad de números racionales-, a los que pone en correspondencia biunívoca con los naturales utilizando un ingenioso sistema de enumeración que despliega los números racionales en una tabla y los recorre diagonalmente mediante números enteros.

Cantor no se detiene aquí. Tomando como base estos esquemas de identidad - enumerabilidad y cardinalidad - y el despliegue de los números en tabla, conforma un *contexto de modelización* o *diorismós* [7] que le permite formular el teorema del continuo. Despliéguense los números racionales en una serie de filas, identificadas cada una de ellas mediante una variable; tómese ahora el número que aparece en la diagonal de la tabla y cámbiese la cifra de cada fila-columna en una unidad; entonces se obtendrá un número que

5 G. Cantor, *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*, edición de J. Ferreirós, Crítica, Barcelona, 2006.

6 Un número transfinito se encuentra entre lo finito y lo Absoluto. Los números transfinitos pueden ser numerados por un ordinal; esto es muy decisivo pues en primer lugar, la clase de todos los números ordinales no puede ser ordenada (de ahí, lo Absoluto, que puede ser «reconocido», pero no conocido). Y, en segundo lugar, Cantor restringe los números infinitos a aquellos que compartes con los finitos la propiedad de ser contados. Cantor trataría de escapar así de la crítica postkantiana que vería en el infinito una ilusión trascendental. M. Richir, "De l'illusion transcendantale dans la théorie cantorienne des ensembles", Philosophies et Sciences, Editions de l'Université de Bruxelles, 1986.

7 El *contexto de modelización* es un concepto intermedio entre el *contexto de descubrimiento* y el *contexto de justificación*, que vendría a funcionar como el *diorismós* geométrico: forma la estructura sobre la que cristalizan los teoremas.

difiere de cada uno de los números de la tabla en una unidad; tal número no se encuentra en la lista de los números reales, es decir, existe un conjunto infinito, al menos, que no es enumerable: el conjunto de los números reales. Este resultado, obtenido mediante reducción al absurdo, establece un modelo en forma de tabla que toma el nombre de «método de diagonal» de Cantor.[8] Nosotros lo entendemos como un *contexto de modelización*, porque con él se btendrán teoremas de gran calado. En el contexto de modelización se aprecia cómo los números son reemplazados por conjuntos de elementos[9] y cómo el infinito es un conjunto.

A partir de aquí, Cantor presenta los números transfinitos como extensión autónoma y sistemática de los números reales R, que ahora le sirven de esquema de identidad, como antes le sirvió la enumerabilidad de los números naturales N. La cuestión a la que hay que responder es: ¿Qué cardinalidad tienen los números reales? Cantor lanzó la hipótesis de que esa cardinalidad era la del continuo e inicia así una vía hacia la definición de conjuntos combinatorios: la ordenación (atributiva) de conjuntos de números (distributivos). Demuestra que existen números transfinitos mayores que $_0$ en cantidades increíbles, por lo que el infinito matemático es imposible de ser intuido, es opaco (teorema de Cantor: $\overline{\overline{X}} \leq P(\overline{\overline{X}})$). Cantor ha de compaginar el que haya infinitos puntos y que estén distribuidos de una manera determinada. ¿Cómo introducir un orden en la indeterminación por antonomasia que es el *infinito*? Cantor utiliza los principios de *generación* y de *orden*, a los que incorpora un sistema operatorio, un álgebra del transfinito.

En primer lugar, si se establece una regla de sucesión de enteros, *S(n)*, obteniendo la serie 1, 2, 3 ... *n*, *n*+1,... entonces podemos imaginar un nuevo número ω que sea el primer número que sigue a la sucesión de números naturales, o límite al que tienden todos los números **ν**, que es *el primer conjunto bien ordenado*, y además el conjunto más grande de todos los números, el *primer transfinito* ω_0: el *primer* entero mayor que cualquier entero situado a continuación de la sucesión completa de los números ordinales ordinarios y que se convierte en matriz de todos los otros números.[10] Mediante este primer principio de formación se pueden generar nuevos ordinales transfinitos sucesivos: ω+1, ω+2,..., ω+ν,... Al carecer esta serie de elemento máximo, puede imaginarse otro número ordinal 2ω, y así sucesivamente, que será el primero después de los números hasta ahora obtenidos ν y

8 G. Cantor, "Sobre una cuestión elemental de la teoría de conjuntos" en Lavine, *Comprendiendo el infinito*, FCE., México, 2005, pp. 115-118.

9 Cf., D. Berlinski, *Ascenso infinito*, Debate, Barcelona, 2006, p. 162.

10 El número ω puede considerarse como un límite al que tiende la variable ν, al modo en que el irracional (√2) puede considerarse el límite de una variable. Se define como: "la sucesión completa de los números naturales N". "El primer conjunto bien ordenado, la matriz de todos los demás". "El primer número que sigue a la sucesión ν". "El elemento minimal de un conjunto bien ordenado que vendría después de los enteros". "El límite al que tienden los números naturales".

$\omega+\nu$. A esta regla la denomina *segundo principio* de formación que permite la definición de un nuevo número que se considera límite de los primeros, inmediatamente superior a ellos. Aplicando ambos principios, se puede definir una jerarquía de números ordinales transfinitos progresivamente mayores: [11]

$2\omega+1$, $2\omega+2$ /…/ $2\omega + \omega = 3\omega$ /…/ $\omega \times \omega = \omega^2$, ω^2+1 /…/ $\omega^2+ \omega+1$ /…/ ω^ω /…/ ω^{ω^ω} /…/

La formación de nuevos números carece de final. Pero, entonces, ¿qué diferencia podría haber entre los números de la primera y la segunda clase? Cantor introduce un tercer principio: *principio de detención o limitación*, que produce ciertos cortes. Así hay que distinguir las potencias (o cardinalidad) de los distintos números transfinitos. El concepto de *potencia* (o *cardinalidad*) de un conjunto relaciona el conjunto derivado (conjunto de todos los puntos límite) y conjunto denso (entre dos números racionales hay infinitos números): "Dos conjuntos M y N son de la misma potencia si a todo elemento de M corresponde un elemento de N y recíprocamente". El conjunto-potencia de un conjunto dado cualquiera (el conjunto formado por todos sus subconjuntos) tiene mayor potencia que el mismo conjunto de partida: A<P(A).Se culmina así la distinción de Cantor entre número (*Zahl*) y numeración (*Anzahl*). Además, Cantor construye los números ordinales mediante una totalización de los naturales, con lo que consigue obtener un número transfinito: ω. Ahora bien, un número que posee una cardinalidad ω puede ordenarse de infinitas formas:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n = \omega;$$
$$a_1, a_3, \ldots a_2, a_4, \ldots = \omega + \omega = 2\,\omega;$$
$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots a_1, a_2, \ldots, a_n = \omega + a_n, \text{ etc.}$$

Los números cardinales son iguales, pero los ordinales pueden ser muy diferentes (criterio de Cantor). Si el cardinal y el ordinal coinciden, entonces es un número finito. Luego habrá *por lo menos* dos conjuntos infinitos con distinta potencia: Los conjuntos *enumerables* o *contables* de cardinalidad $\aleph_0$, que tienen la potencia de los números naturales, y los conjuntos *no-enumerables*, que tienen la potencia de los números reales, R. Cantor ha encontrado un método para comparar los tamaños de los números cardinales y demuestra que $\aleph_0 < c$. La pregunta que puede hacerse a continuación es: ¿existirán números mayores que c? O bien: ¿Cuál es el número cardinal que debe asignarse al continuo? Para un

---

11 Denjoy utiliza una metáfora muy intuitiva para exponer este concepto: Delante de la tortuga que Aquiles acaba de alcanzar, colocamos una segunda, y para alcanzarla Aquiles tendrá que atravesar, como en la persecución de la primera, una infinidad de instantes. Los números ordinales que sirven para marcar estos instantes intermedios son $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$… etc. Estos instantes serán el $(\omega+1)^o$, el $(\omega+2)^o$, etc. Y como el instante en que Aquiles alcanza a la segunda tortuga viene después de todos estos instantes así especificados, tendrá por rango «$\omega+ \omega$», que se indica $\omega+ \omega$ u $\omega\times 2$ (2 veces ω)", A. Denjoy, "La inneidad del infinito" en F. LeLionnais (y col.), *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, EUDEBA, Buenos Aires, 1962, p. 204.

conjunto infinito $P(\aleph_0)$ tenemos que $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Al cardinal de $P(\aleph_0)$ se le denota por c, el conjunto de los conjuntos de los números naturales, que pueden escribirse en un sistema de base 2, como secuencias infinitas de 1s y 0s. Cantor demuestra que el número mayor que podemos obtener será $2^{\aleph_0}$ que tiene precisamente la potencia del continuo. El problema del continuo es, por tanto, un problema de control de la jerarquía inducida por ese poder de auto-trascendencia de la trascendencia, como ve muy bien Salanskis: ¿Puede asignarse el lugar del continuo en la jerarquía del infinito que la teoría permite postular?[12] Pero Cohen demuestra en 1963 que ello dependerá de la elección de determinados axiomas o de su negación.

* * *

De este rápido repaso por la obra cantoriana, se sigue que, desde el punto de vista ontológico, Cantor defiende la prioridad ontológica de lo discreto; y desde el punto de vista gnoseológico, que el concepto de continuo es resultado de un proceso generativo que produce totalidades combinatorias y que tiene como contexto de modelización *la diagonal* de Cantor. Las críticas ontológicas a Cantor proceden de los poskantianos que consideran el infinito como una ilusión trascendental (por ejemplo, M. Richir). Las críticas gnoseológicas se corresponden a la formación de las paradojas. Desde esta perspectiva, defenderé que el método de la diagonal puede ser muy fértil o bloquear por entero la investigación y convertirse en mero *pseudocontexto de modelización*. ¿Cómo es esto? Dependerá de cómo se entiendan las totalidades que resultan de los procesos de generación y orden: si se entienden como totalidades lógicas (distributivas), conduce a las paradojas. Pero si se entienden como totalidades *combinatorias,* el método diagonal es fértil; en este último sentido lo defienden dos investigadores muy relevantes: el matemático Shaughan Lavine[13] y el filósofo Alain Badiou.[14] Veamos:

a) *Planteamiento conjuntista*. Lavine insiste en que Cantor distingue entre colecciones combinatorias, que eligen sus elementos de manera arbitraria y obedecen a los principios de buen orden y el axioma de elección (conjuntos de Cantor); y colecciones lógicas, que eligen sus elementos en virtud de una regla y admiten el axioma de *comprehensión* o *abstracción* (conjuntos de Frege-Russell).[15] Cantor se adelanta a esta objeción, como se puede comprobar en la carta a Jourdain del 9 de julio de 1904:

---

12 Cf. J.M. Salanskis, *L´herméneutique formelle*. *L'infini-Le Continu - L'Espace*, CNRS, París, 1991.

13 S. Lavine, *Comprendiendo el infinito*, FCE., México, 2005.

14 A. Badiou, *Le nombre et les nombres*, Seuil, Paris, 1990 ; *El ser y el acontecimiento*, Manatial, Buenos Aires, 1999.

15 Zermelo utilizará el axioma de elección para salvar este resultado que descarta el axioma de comprehensión de Frege, Peano y Russell. *Ley* en Cantor significa «buena ordenación», «conteo»... Zermelo, además, demostró que eran compatibles el axioma de *elección* y el axioma del *conjunto potencia* (pág. 131 y 181). Un múltiple es tan numeroso como otro (de la misma potencia) si existe una correspondencia entre ambos múltiples uno a uno (dos conjuntos poseen la misma *potencia* o son

> Esta imposibilidad descansa en lo siguiente: Una multiplicidad inconsistente, debido a que no puede ser comprendida como un *todo*, como una sola *cosa*, no puede ser utilizada como *elemento* de una multiplicidad. Solo las *cosas completas*, solo los *conjuntos*, pueden ser tomados como *elementos* de una multiplicidad; no así las *multiplicidades inconsistentes*, porque está en su naturaleza que nunca puedan ser concebidas como *objetos completos* y *realmente existentes*.[16]

Los conjuntos de Cantor darán lugar a las famosas paradojas al confundir ambas colecciones. La colección combinatoria se ha de entender como una totalidad atributiva (en el sentido usado por la escolástica) cuyas partes se vinculan distributivamente y, por lo tanto, las propiedades intensionales se unen disyuntivamente, de manera que una parte del conjunto puede definirse por la negación de otras partes (por ejemplo: este hombre habla castellano, pero no inglés). Ahora bien, la definición de conjunto de Rusell es puramente lógica (distributiva): lo que se dice del todo se dice de cada una de las partes, por lo que las características del todo se conservan en todas y cada una de ellas (relaciones *simétricas* y *transitivas*). Para Russell, una clase puede ser definida como la totalidad de los términos que satisfacen alguna función proposicional , que es el principio de *comprensión* o de *abstracción*. Define las clases como objetos lógicos y la pertenencia como relación lógica, de manera que un número se transforma en una clase (lógica) —el 2 es la clase de todas las parejas—, lo que le conduce a la teoría de los tipos: a cada conjunto atributo le corresponde su propia extensión, es decir, todos los objetos para los que ese atributo es predicable. O de otra forma: toda condición (proposición) determina una clase, la clase compuesta por los individuos que satisfacen esa condición. La denuncia inmediata de Poincaré fue que las paradojas se producen por las definiciones *impredicativas* o autorreferenciales. Pero si queremos que todos los elementos se hallen sujetos a una regla, entonces se puede encontrar un «error» en el método de la diagonal de Cantor: Si el argumento de Cantor demuestra que no existe un número cardinal máximo y si el número máximo es precisamente el número máximo, puesto que todas las clases están incluidas en las clases de individuos, así como si los números ordinales están bien ordenados, entonces existe un ordinal máximo, el tipo de orden de la clase de todos los números ordinales. Esto se puede entender como la negación de la identidad entre ser y lenguaje.[17]

Ahora bien, si el teorema de Cantor dice que no existe un número cardinal máximo, es porque se lo permite la definición de *colección combinatoria* (por ejemplo, un conjunto es tal y tal, pero no tal y tal). Mas, si se introduce una regla para cada elemento o subconjunto y se toma la propiedad «estar incluido», ha de existir la clase máxima que pertenece (y no

---

semejantes *extensivamente* si existe entre ellos una correspondencia biunívoca).

16 "Carta de Cantor a Jourdain del 9 de julio de 1904" en Lavine, *op. cit.*, pág. 115.

17 En lo que coincide con Badiou: exceso del ser sobre el saber. Esta identidad procede quizá del Rigveda y se formula con Parménides: «Que ser y pensar es una misma cosa».

pertenece) a la totalidad combinatoria. La clase de clases combinatorias —dice Lavine— sólo aparentemente es una parte propia de sí misma: cuando se consideran los conjuntos contables, no los arbitrarios. Es decir, las paradojas se producen al incorporar a las colecciones un lenguaje de control, un sujeto lógico-lingüístico humano. Por eso Cantor se escabullía diciendo que los conjuntos infinitos sólo pueden ser contados por un sujeto infinito operatorio: Dios.[18]

Lavine muestra que en un dominio infinito existen más colecciones combinatorias que lógicas. Y como los conjuntos combinatorios obedecen al axioma de buen orden y al axioma de elección, se permite justamente elegir un elemento de cada subconjunto de un conjunto no vacío de manera arbitraria, sin seguir una regla. Para Cantor, concluye Lavine, la ley que afecta a los conjuntos no tiene que ver con reglas o funciones proposicionales, sino con conteo, enumeración o buena ordenación.[19]

b) Planteamiento filosófico. Badiou, desde una perspectiva filosófica y en su particular lenguaje, ha expuesto también esta misma idea. Rechaza que el ser sea lo Uno. El ser siempre se presenta como multiplicidad y el Uno sólo es una construcción operatoria («cuenta-por-uno»); la multiplicidad anterior a toda operación es inconsistente; una vez estructurada, la multiplicidad es consistente o una *situación*. Por eso, dice Badiou, que la única teoría que nos permite pensar lo múltiple en tanto que múltiple (multiplicidad inconsistente) es la teoría de conjuntos de Cantor. Distingue Badiou entre el ser *presentado* (o estructural) y el *representado* (o metaestructural), a los que hace corresponder con las dos relaciones fundamentales de la teoría de conjuntos: la *pertenencia* [e], entre un individuo y el conjunto, y la *inclusión* [Ì], entre unos conjuntos y otros.[20] Lo que significa que [e] y [Ì] no se encuentran en el mismo nivel conceptual. Si se hace esto, entonces tienen lugar las paradojas, pues ya se presupone que "nada de lo múltiple puede exceder una lengua bien hecha. Pero en el caso de los conjuntos infinitos son estructuras disjuntas que, al ponerse en el mismo nivel, confunden las estructuras atributivas [e] con las distributivas [Ì]. Y además, al incorporar la inclusión sobre la pertenencia, la totalidad atributiva de los múltiples queda definida por otra totalidad distributiva, la inclusión, formando una multiplicidad que es *combinatoria*. Y que va mucho más allá de la posibilidad de ser controlada por el lenguaje. El criterio es que siempre hay un exceso de partes sobre la pertenencia.[21]

* * *

18 Ignasi Jané hace referencia a tres tipos del infinito actual: *a*) *Absoluto*: Dios; *b*) *Transfinito*: infinito concreto, que ocurre en la naturaleza creada; *c*) *Números transfinitos*: infinito abstracto, que puede ser comprendido por la naturaleza humana.

19 *Axioma de elección*: Si el conjunto α es finito, no hay problema. Por ejemplo: sea α el conjunto de circunscripciones. Sea (f) una función de elección que selecciona un delegado (β) de cada múltiple perteneciente a α. Todos esos delegados constituyen una delegación (los diputados a Cortes). Ahora bien, ¿qué ocurriría si el conjunto es infinito? ¿Qué significa una "mayoría"?...

20 Distinción debida a Peano (1889).

21 A. Badiou, *El ser y el acontecimiento*, op. cit., p. 115.

Así pues, tanto por la vía matemática de Lavine como por la vía filosófica de Badiou, se refuerza la vía técnica de la axiomática de Zeremelo-Fraenkel-Von Neuman. Y, sin embargo, hay algo que no nos deja satisfechos en estos dos proyectos: Por una parte, ¿qué sentido puede tener el concepto de totalidad combinatoria infinita? Y, por otra, ¿cómo puede hacerse presente lo visible —la «cuenta por uno»— desde lo infinito? Me parece que la filosofía de Thom, desde cierta perspectiva, responde a estos dos interrogantes que surgen del planteamiento cantoriano. Por una lado, en la parte crítica, muestra las insuficiencias de la definición de número como adición de entidades en la teoría de conjuntos: No se puede eliminar la dependencia del contexto, porque elimina el sentido, la significatividad. Y, quizá sorprendentemente para algunos, Thom se acoge a la filosofía de Aristóteles.[22]; por el otro, la parte constructiva, la propuesta de una ontología regional de cuño topológico y que he llamado en otras ocasiones *Semántica topológica*, el paso del infinito a las formas mundanas.

2. La posición crítica de Thom frente a la teoría de conjuntos

Thom utiliza entonces un argumento *trascendental* para enfrentarse a la teoría de conjuntos: ¿Cuáles son las condiciones de posibilidad de las morfologías, que nos permiten tener conocimiento del mundo, salvando la significatividad de las matemáticas? La teoría de conjuntos cantoriana impediría responder adecuadamente: por su falta de espacio sustrato, y por la irrupción brusca de las figuras morfológicas, con su inexplicable semanticidad. Crítica que arrastra tanto al fundamento logicista del concepto de *conjunto* como a su fundamento generativo-sintactista.

2.1. Reivindicación del espacio sustrato

La crítica más radical de Thom contra la teoría de conjuntos, como ya hemos indicado, procede de la ausencia de espacio-sustrato en la teoría de conjuntos. Una ausencia que aparece en un trabajo pionero de Cantor en el que mostraba la falta de dimensiones espaciales —ante el escándalo de Kronecker, que quiere impedir la publicación del artículo— al mostrar una correspondencia biunívoca entre los puntos de una superficie y los de una línea.[23] Como las correspondencias de Cantor eran discontinuas podía realizar esta operación que, ontológicamente, conduciría a un mundo-migma casi (o sin casi) védico, en el que todas

22 Para Aristóteles, el infinito pertenece a la categoría de cantidad; por tanto, no se identifica con Dios. El *apeiron* es un falso infinito y Dios es una sustancia cuyos atributos tienen que ver con la « totalidad», la «plenitud» o la «eternidad», pero no con el infinito. P. Zellini, *Breve historia*, op. cit., p. 73.

23 J. Dauben, "El desarrollo de la teoría de conjuntos", en I. Grattan-Guinness (comp.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910*, Alianza, Madrid, 1984, p. 242.

las formas no serían más que apariencias. Pero Thom defenderá el espacio-sustrato con pasión y determinación:

> La teoría de conjuntos es una teoría sin espacio-substrato, que combina puntos «no localizados», aunque hay junto al concepto de propiedad característica de un conjunto, el embrión de la noción de pregnancia. Tengo la convicción de que buena parte de las dificultades de la teoría de conjuntos —y su disolución delirante en el transfinito cantoriano— son debidas a esta ausencia de espacialidad. Intentar imaginar espacialmente —sobre el modelo de los diagramas de Venn— un conjunto que se contiene a sí mismo como elemento.24

Es muy interesante «ver» cómo se transforma este problema de los diagramas de Venn en un abierto topológico con frontera.[25] Véase la figura 1:

Thom, siguiendo a Einstein, considera que el espacio engendra la materia. El espacio, contra Descartes, nunca está engendrado por un mecanismo generativo, por el grupo aditivo R^3 de las traslaciones. De ahí el interés de Thom por Aristóteles, pues al hacer que la sustancia tenga como predicado el *lugar*, se ve obligado a multiplicar las materias. Y justamente lo común que tienen las materias es el continuo: 1) Porque la materia primera admite contrarios. 2) Porque las magnitudes continuas y los números naturales se comportan de manera inversa: Si toda entidad continua puede ser sometida a sustracciones sin agotarse, todo número natural sometido a sustracciones se agota, esto es: $N - n = 0$. El continuo es el sustrato esencial de toda movilidad; sólo si no hubiese movilidad, si todo fuese reposo, no habría rasgos diferenciales entre el *lugar* de la cosa y la *forma* de la cosa. Víctor Gómez Pin ha estudiado espléndidamente el vínculo entre Aristóteles y Thom, lo que nos excusa de insistir en él.[26] Esta crítica se hace extensiva a la definición de número como conjunto que propone Dedekind y a su método de *cortaduras*, que intenta ofrecer un fundamento a la aritmética independientemente del espacio y del tiempo:

---

24 R. Thom, "Le problème des ontologies régionals", *Apologie du Logos* (*AL*), Hachette, Paris, 1990, p. 462.

25 *Abierto*, noción que remite a *localidad*, intermedia entre el vacío y el sustrato entero. *Local*: disociado de figura; aunque toda figura se encuentra en un lugar, no define al lugar. El *abierto topológico* es la interpretación de lo local (en geometría moderna).

26 V. Gómez Pin explica espléndidamente este proceso que va de las categorías a la abstracción en Aristóteles en *La tentación pitagórica*, Síntesis, Madrid, 1998, cap. 4.

> Al decir que la aritmética (álgebra, análisis) es sólo una parte de la lógica, estoy manifestando ya que considero el concepto de número como algo completamente independiente de las representaciones o intuiciones del espacio y del tiempo, como algo que es más bien un resultado inmediato de las puras leyes del pensamiento.[27]

Thom cuestiona la definición por *compleción* de Cauchy o por *cortaduras* de Dedekind —la recta real es un objeto construido a partir de los enteros, los racionales—, porque "es muy poco constructiva; y, sobre todo, presupone *un mecanismo generativo infinito* (la adición de los enteros y los racionales), mientras que la intuición psicológica del continuo que sacamos de la contemplación del espacio amorfo o del transcurso del tiempo en nuestro flujo de consciencia no nos revela ningún esqueleto algebraico subyacente".[28] Y propone la inversión misma del proyecto de Dedekind, que construye el continuo a partir del numerable; al contrario, dirá Thom, es el infinito numerable lo que queda justificado por inmersión en el continuo.[29] Y, más todavía, Thom considera que el cuerpo de los reales es sugerido por el cálculo diferencial y no preexiste a éste.[30]

La posición de Thom vendría a significar un vuelco a la concepción de Dedekind, que parte de la insuficiencia de los axiomas euclidianos y advierte que la tendencia a considerar el espacio como un continuo es injustificable. Todas las construcciones geométricas que intervienen en los *Elementos* de Euclides podrían adaptarse a un espacio puramente racional, cuya discontinuidad pasaría de hecho inadvertida:

> En mi opinión, la mencionada base no es suficiente, a menos que además de los principios euclídeos se añada el punto clave de mi escrito, la esencia de la continuidad, en modo alguno contenido en ellos [en los *Elementos* de Euclides].[31]

---

27 Dedekind, *¿Qué son y para qué sirven los números?, op. cit*., p. 97.

28 R. Thom, "Une définition continue du nombre", *op. cit*., p. 163.

29 "Una auténtica inversión, diría yo, (...) Según el punto de vista tradicional, el continuo se construye a partir del numerable por compleción o mediante el procedimiento de Dedekind. Pero yo pienso que es al revés: el infinito numerable es lo que queda justificado por su inmersión en el continuo". R. Thom, *Palabras y catástrofes* (*PyC*), Tusquets, Barcelona, 1986, p. 152.

30 "Esta anterioridad del continuo que postulamos va en contra de la vía tradicional que hace de la recta real un objeto construido a partir de los enteros, luego de los racionales (por las *cortaduras* de Dedekind o la compleción de serie de Cauchy). Me esforzaré en mostrar que la estructura algebraica del cuerpo de los reales no preexiste al cálculo diferencial, sino que es, al contrario, sugerido por este último. R. Thom, "Les réels et le calcul différentiel", *AL*, p. 316.

31 Y continúa un poco más abajo: "El concepto de número, como proporción entre magnitudes homogéneas, no llegará entonces nunca más allá de lo racional (…) Pero nunca se encuentra en Euclides, ni en otro escritor posterior, la realización de semejante compleción, o sea el concepto de dominio de magnitudes continuo (…) Teniendo todo esto en cuenta sigo afirmando que los principios euclídeos solos, sin apelación al principio de continuidad, que no está contenido en ellos, son incapaces de fundar una teoría completa de los números reales como proporciones de magnitudes…" R. Dedekind, *¿Qué son y para qué sirven los números?, op. cit*., pp. 162-164.

La crítica de tipo más técnico a las «cortaduras» de Dedekind se prolonga como crítica ética (pedagógica). Pues la ausencia de semanticidad en los métodos operatorios sintácticos de la generatividad de los números compromete a la educación, es decir, a la inteligibilidad. Por eso me parece que la conexión con la filosofía aquí es básica. El éxito de la empresa generativa ha permitido desarrollar las matemáticas en diferentes campos científicos, fundamentalmente en la física, aunque en los últimos años también ha afectado a las ciencias humanas y en particular a la lingüística y a la biología molecular. El proyecto de investigación de Chomsky se basó precisamente en la capacidad generativa de la sintaxis de las lenguas. De tal modo que Chomsky, por ejemplo, sólo considera dotada de propiedades generativas a la Sintaxis, dejando la Semántica, que excede la estructura de los autómatas, a cargo de las Ideas Innatas, con una muy ingrata consecuencia: de los límites internos de los formalismos se pasa a una tesis ontológica que sólo sería legítima si hubiera sido fundada en las descripciones formales como ontológicamente determinantes, lo que no es el caso de las Gramáticas Generativas.[32] Es una crítica a quienes, por extensión, defienden la generatividad de cualquier otra entidad, por ejemplo, la teoría informacional del ADN o la teoría generativo-transformacional de Chomsky.[33]

Y, por último, Thom cuestiona la vía logicista de Frege-Russell y su proyecto fundamentalista. Thom observará que ha sido una pretensión aberrante la de que la matemática pudiera basarse en sí misma o en la lógica. Un eslogan al que contrapone el apotegma de que «todo lo riguroso es insignificante». En su lectura de Gonseth, Thom se pregunta cómo es posible que la matemática sea a la vez significante y rigurosa. Por un lado, y frente al reproche de psicologismo por parte de los formalistas, niega que las matemáticas puedan reducirse a lógica, que sean una tautología. (Contra las matemáticas estructuralistas, abstractas: "Quizá pueda defenderse este punto de vista, pero para mí la tendencia a pensar que el ser precede a la nada es irresistible. El elemento precede a la relación. No hay relación sin elemento y la visión de los estructuralistas (que definen la relación intrínseca sin tener en cuenta los elementos) me parece sofisticada y sin demasiado fundamento. Mi universo es un mundo de objetos y de cosas y el no ser sólo se presenta,

32 Searle, por ejemplo, escribe: "El elemento más débil de la gramática de Chomsky es el componente semántico, como él mismo admite repetidamente (...) La revolución de Chomsky es en gran medida una revolución en el estudio de la sintaxis" (pp. 38 y 45) en G. Harman (comp.), *Sobre Noam Chomsky: Ensayos críticos*, Alianza, Madrid, 1981.

33 "Par ailleurs, la possibilité qu'a une langue de générer une infinité de phrases tirent bien plus au caractère ouvert du lexique (riche de toutes les possibilités de l'univers sémantique) qu'à la variété de s constructions syntactiques —dont on a vite fait le tour, au moins dans leurs grands traits. C'est cette auto - limitation des capacités génératives de la syntaxe qui demande explication" René Thom, *Modèles mathématiques de la morphogenèse* (*MMM*), Christian Bourgois, París, 1980, p. 164.

es verdad, en la medida en que aparece la variabilidad"). [34] Por otro, observa que, al igual que el formalismo se destruye a sí mismo por el teorema de Gödel, las matemáticas del Caos, al iterar distintos sistemas de ecuaciones en los ordenadores, producen estructuras caóticas y muestran cómo el determinismo se destruye a sí mismo. Y, en fin, considera que en matemáticas los problemas de la verdad y del error son de poca importancia; la historia revela que los errores se detectan antes o después. Ante el formalismo y el construccionismo intuicionista, Thom defiende una postura plenamente *inmanentista*:

> Creo que esos grandes teoremas [que se adaptan a un número muy grande de situaciones] extraen su importancia de analogías formales que se hunden mucho más profundamente en la constitución misma de las estructuras psíquicas de la especie humana, aquellas que determinan la manera propia en la que el espíritu organiza la realidad.[35]

3. Del continuo al mundo

El continuo, desde el punto de vista de la gnoseología, es posterior a lo discreto. Así, Thom podrá decir que "la descomposición discreta de los procesos naturalmente continuos en hechos aislados no es más que una ilusión del espíritu;[36] pero ontológicamente el continuo es anterior. De manera que *lo infinito no llega a lo real sino inmerso en lo continuo*.[37] Mas, ¿cómo se hace presente entonces el mundo? Veamos muy rápidamente tres contextos: morfológico, lingüístico y matemático.

a) Las morfologías:[38] El continuo tiene que estar "cargado" de estratos, de hipergéneros, de géneros… que se van distribuyendo por el espacio-tiempo según estructuras morfológicas. Así se podrán ir describiendo las morfologías mundanas desde "la formación de aglomerados polvorientos, explicación que es matemáticamente equivalente al análisis de la formación de las singularidades de las cáusticas",[39] pasando por la estructuración de las capas geológicas, hasta los organismos, los animales y el ser humano. El programa de Thom rechaza una teoría de la evolución resuelta por puros mecanismos de supervivencia y presta atención a la morfología, tal como hace en la actualidad el programa Evodevo,[40] que tiene presente los límites impuestos por las formas que toman su fuerza de los genes

34 R. Thom, "Determinismo e innovación" en A.V.V., *Proceso al azar*, Tusquets, Barcelona, 1986, p. 69.

35 R. Thom, "Réalité naïve et réalité scientifique", fotocopiado.

36 R. Thom, *Semiofísica*, op. cit., p. 41.

37 R. Thom, *Semiofísica*, op. cit., p. 83.

38 R. Thom, "Sur l'origine et la stabilité des symetries", *AL*, pp. 269-278.

39 V.I. Arnold, *Teoría de catástrofes*, Alianza, Madrid, 1987, p. 67.

40 Jaume Baguñá y Jordi García-Fernández (coords.), *Journal of Developmental Biology*, volumen 47, número 7/8, 2003. Se encuentra en: http://www.ijdb.ehu.es/03078contents.htm.

Homeobox,[41] y la teoría del *equilibrio punteado* de S. J. Gould y N. Eldredge.[42] Thom se opone tanto a la evolución ilimitadamente innovadora, como defiende Prigogine y su escuela, una mezcla de neodarwinismo y termodinámica irreversible;[43] como a las teorías de la infinitud o del principio de plenitud, de un universo en el que hubiera ejemplares de todas las variantes de géneros de cosas vivas: "Todo lo virtual se hará realidad", porque el mundo es mejor cuántas más cosas contenga (implícito en algunas formas de conciencia ecológica).[44] Para Thom, las formas del mundo son accidentales a partir de constricciones morfológicas. Más bien es un mundo que se repite mucho más de lo que en principio estamos dispuestos a creer. Geoffroy de Saint-Hilaire empieza a ser resultar vencedor en aquel debate que tanto entusiasmara a Goethe.[45]

b) De la etología al lenguaje. Thom defiende la aparición de lo simbólico como una manera que tienen los organismos de abordar la identidad de un ser: la identidad espaciotemporal —localización—, representada por «sustantivos» y la identidad semántica —comprensión de un concepto—, representada por «adjetivos». Para explicarlo ha construido un modelo de estructuras simuladoras del psiquismo de las presas, mediante el grafo «lazo de apresamiento».[46] La propia actividad neurológica del animal realiza un modelo del espacio que lo rodea, un mapa motriz que le permite controlar sus propios desplazamientos, capturar presas o huir de los predadores (las formas genéticas son suministradas por el patrimonio de la especie y determinan un comportamiento bien definido). El paso del animal al ser humano se produce por la aparición del lenguaje que, a diferencia del animal —o del bebé, que se lleva los objetos

41 García Bellido, A. Ripoll, P. y Morata, G.: "Developmental compartmentalization of the wing disk of Drosophila", *Nature New Biology*, 245 (1973), 251-253.

42 Stephen Jay Gould, *La estructura de la teoría de la evolución*, Tusquets, Barcelona, 2004.

43 Crítica que se encuentra, por ejemplo, en "Réalité naïve et réalité scientifique".

44 Cf. Lovejoy, *La gran cadena del ser*, cap. IV.

45 "«¿Qué piensa usted de este gran suceso? —exclamó al verme—. Ha sobrevenido la erupción del volcán. ¡Está todo ardiendo, y ya no se trata de una sesión a puertas cerradas! (…) ¡Una terrible historia! —repliqué—. Pero en las circunstancias de Francia, y con un ministerio semejante, sólo podía acabar con el destierro de la familia real». «Parece que no nos entendemos, querido —replicó Goethe—. No hablo de esas gentes; se trata de cosas completamente distintas. Me refiero a la lucha entre Cuvier y Geoffroy de Saint-Hilaire, tan interesante para la ciencia, y que ha estallado públicamente ante la Academia»... «Ahora ha entrado también decididamente a nuestro lado Geoffroy de Saint-Hilaire, con todos sus discípulos y partidarios franceses. Este acontecimiento tiene para mí un valor incalculable, y con razón recibo con júbilo la victoria final de una causa a la que he consagrado la vida, y que es profundamente mía»". J. P Eckermann, *Conversaciones con Goethe en los últimos años de su vida*, vol. 3, Calpe, col. Popular, 1920, pp. 314-316.

46 R. Thom, *Estabilidad estructural y morfogénesis*, Gedisa, Barcelona, 1987, pp. 306 y ss. *Esbozo de semiofísica*, op. cit., pp. 87 y ss.

a la boca— permite al ser humano apropiarse de seres intermediarios entre los objetos exteriores y las formas genéticas, que son los *conceptos*.[47]

c) Los números reales: El continuo se enfrenta radicalmente al *mecanismo generativo infinito*, y no sólo desde la perspectiva gnoseológica, sino desde la puramente operatoria y ontológica.[48] Thom cuestiona a quienes defienden la generatividad del número, hasta el punto de que la propia *suma* debe encuadrarse en el continuo: “La definición de la suma, como yo la entiendo, corresponde a la situación en que se da la catástrofe elemental de captura de un pozo de potencial por parte de otro, como en la cúspide ... Es en parte como aquello que se les enseñaba a los niños: para sumar los huevos de dos cestos se pone el contenido de uno en el otro: Todo está ahí ya: la adición se define recurriendo a un proceso fundamentalmente continuo y sólo artificialmente se realiza una operación definida en forma abstracta y discreta”.[49] La cuestión da un giro total. Se trata de justificar el álgebra y el análisis, no a partir de los números naturales o de los enteros, sino a partir de entidades continuas. Thom demostrará que los números reales son números de rotación de *hojaldrados*[50] sobre el toro topológico; de esta manera se enfrenta Thom al continuo en sentido sustantivo: el continuo de la recta real.

47 R. Thom, *Estabilidad estructural y morfogénesis*, op. cit., pág. 320.

48 R. Thom, “La philosophie naturelle, une quête de l’intelligible”, en *AL*, p. 498. Thom afirma que la dificultad filosófica procede de que “no existe interpretación «ontológica» alguna de las operaciones algebraicas”, de manera que sólo puede procederse por adivinación.

49 R. Thom, *PyC*, p. 152.

50 *Feuilletage* / hojaldrado / foliación.